

## Пучки Фурье–Бесселя с конечной энергией

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, Д.С. Калинкина<sup>2</sup>, Е.С. Козлова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В данной работе рассматривается новый вид пучков Бесселя, обладающих свойством Фурье-инвариантности и поэтому названных пучками Фурье–Бесселя. Данные пучки в отличие от известных пучков Бесселя имеют слабые боковые лепестки. Получены аналитические выражения для комплексной амплитуды поля в начальной плоскости и дальней зоне. Данные пучки обладают конечной энергией, хотя у них нет Гауссовой огибающей. В исходной плоскости и в зоне Фраунгофера их комплексная амплитуда пропорциональна функции Бесселя дробного порядка (нечетное целое число, деленное на 6). По сравнению с модами Лагерра–Гаусса с нулевым радиальным индексом, такие пучки имеют меньшее внутреннее темное пятно. Такие пучки могут генерироваться пространственным модулятором света и применяться в телекоммуникациях, интерферометрии и при захвате металлических частиц.

**Ключевые слова:** оптические вихри, Фурье-инвариантные пучки, пучки Бесселя.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Пучки Фурье–Бесселя с конечной энергией / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Д.С. Калинкина, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 4. – С. 506-511. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-864.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Kalinkina DS, Kozlova ES. Fourier-Bessel beams of finite energy. Computer Optics 2021; 45(4): 506-511. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-864.

### Введение

Большое внимание в оптике уделяют инвариантным к распространению световым пучкам, которые распространяются в свободном пространстве или в оптической системе, сохраняя свою поперечную структуру (вплоть до масштаба и поворота).

Среди пучков, которые распространяются без дифракции, наиболее известны пучки Бесселя [1], пучки Матвея [2] и параболические пучки [3]. Все они представляют собой решение непараксиального уравнения Гельмгольца, обладают бесконечной энергией и вследствие этого могут быть сгенерированы только приближенно. Например, пучки Бесселя обычно генерируются с помощью аксикона [4, 5], в то время как их изображения в дальней зоне (идеальные оптические вихри), как это было показано в [6], лучше формируются с использованием другого фазового элемента. В том же 1987 году, когда были открыты пучки Бесселя, были предложены пучки Бесселя–Гаусса [7], обладающие конечной энергией. Как пучки Бесселя, так и пучки Бесселя–Гаусса не являются Фурье–инвариантными, поскольку преобразование Фурье–пучков Бесселя дает кольцевую дельта-функцию Дирака, тогда как преобразование Фурье–пучков Бесселя–Гаусса описывается модифицированной функцией Бесселя. Позже появились различные семейства вихревых пучков, амплитуда которых пропорциональна функции Бесселя. К этим семействам относятся пучки Бесселя с квадратичной радиальной зависимостью [8], обобщенные пучки Бессе-

ля–Гаусса [9], пучки Ханкеля–Бесселя [10], асимметричные пучки Бесселя [11] и Бесселя–Гаусса [12] или дробные пучки Бесселя [13]. Однако все перечисленные выше типы пучков Бесселя [1, 7–13] не являются Фурье-инвариантными. В [14] описаны не изменяющиеся по форме бесселевы пучки (в том числе высокого порядка), которые экспериментально генерировались из Гауссова пучка с помощью двух аксиконов.

Параксиальное распространение в свободном пространстве и в оптических системах обычно описывается некоторыми интегральными преобразованиями, такими как преобразование Френеля, ABCD-преобразование или преобразование Фурье. Последнее описывает распространение от передней фокальной плоскости тонкой сферической линзы к задней фокальной плоскости. Для невихревых полей собственные функции указанных линейных канонических преобразований подробно исследованы в [15]. Среди оптических вихрей наиболее известным Фурье-инвариантным полем является пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ) [16]. Обычные пучки ЛГ имеют широкую темную область в центре. Это создает ряд проблем в задачах интерферометрии, где требуются пучки с более узким темным пятном. Такие пучки также можно использовать для эффективного вращения металлических (поглощающих) частиц, поскольку такие микрочастицы захватываются в центральную темную область.

В этой работе мы аналитически описываем световое поле, которое инвариантно к преобразованию Фурье, содержит оптический вихрь и имеет слабые боковые лепестки. Это поле удовлетворяет паракси-

альному волновому уравнению. Однако его комплекснозначная амплитуда найдена только в зоне дифракции Фраунгофера. Этот пучок имеет конечную энергию, хотя и не обладает Гауссовой огибающей. По мнению авторов, в данной работе впервые продемонстрирован пучок с конечной энергией, комплексная амплитуда которого содержит только функцию Бесселя и амплитудный множитель (степень от радиальной полярной координаты). Отметим, что радиальное распределение комплексной амплитуды найденного пучка пропорционально функции Бесселя дробного порядка. Если сравнивать с полупелыми бesselевыми пучками [13], представленные пучки Бесселя дробного порядка описываются функцией Бесселя, имеющей порядок нечетного целого числа, деленного на 6. Главное геометрическое отличие предложенных пучков Бесселя дробных порядков от мод ЛГ с нулевым радиальным номером заключается в том, что темное пятно первых меньше. А основное отличие от бездифракционных бesselевидных пучков [14] – слабые боковые лепестки.

#### Амплитуда пучков Фурье–Бесселя

Пусть исходное поле в начальной плоскости (передняя фокальная плоскость сферической линзы) имеет следующую комплексную амплитуду:

$$E_1(r, \varphi) = (\sqrt{\alpha}r)^{-(m+1)/3} \times J_{(2m-1)/6}(\alpha r^2) \exp(i\alpha r^2 + im\varphi), \quad (1)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты,  $m$  – топологический заряд оптического вихря,  $\alpha$  – коэффициент масштабирования. Заметим, что в отличие от известных радиально-симметричных оптических вихрей  $m$ -го порядка, вблизи оптической оси комплексная амплитуда не возрастает, как  $r^m$ . Ниже мы получим дополнительное условие для порядка вихря  $m$ .

Согласно [17], в дальней зоне (задняя фокальная плоскость сферической линзы) комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_2(\rho, \theta) = \frac{-ik}{2\pi f} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E_1(r, \varphi) \times \exp\left\{-i\frac{k}{f}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right\} r dr d\varphi, \quad (2)$$

где  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты в дальней зоне,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число света с длиной волны  $\lambda$ ,  $f$  – фокусное расстояние линзы.

Подставляя (1) в (2), получим:

$$E_2(\rho, \theta) = \frac{-ik}{2\pi f} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (\sqrt{\alpha}r)^{-(m+1)/3} J_{(2m-1)/6}(\alpha r^2) \times \exp\left\{i\alpha r^2 + im\varphi - i\frac{k}{f}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right\} r dr d\varphi. \quad (3)$$

Вычисляя интеграл по  $\varphi$ , мы получим:

$$E_2(\rho, \theta) = (-i)^{m+1} \frac{k}{f\alpha^{(m+1)/6}} \exp(im\theta) \times \int_0^\infty r^{(2-m)/3} J_{(2m-1)/6}(\alpha r^2) \exp(i\alpha r^2) J_m\left(\frac{k}{f}\rho r\right) dr. \quad (4)$$

В [18] есть интеграл (выражение 2.12.40.15):

$$\int_0^\infty x^{(2-\nu)/3} \left\{ \begin{matrix} \sin bx^2 \\ \cos bx^2 \end{matrix} \right\} J_{(2\nu-1)/6}(bx^2) J_\nu(cx) dx = (4b)^{(\nu-2)/3} c^{-(\nu+1)/3} \left\{ \begin{matrix} \sin \psi \\ \cos \psi \end{matrix} \right\} J_{(2\nu-1)/6}\left(\frac{c^2}{16b}\right), \quad (5)$$

где  $b, c > 0$ ,  $\text{Re } \nu > -(7 \pm 3)/4$  и

$$\psi = (\nu + 1) \frac{\pi}{6} - \frac{c^2}{16b}. \quad (6)$$

Используя этот интеграл, из уравнения (4) получим:

$$E_2(\rho, \theta) = i^{-2(m+1)/3} \left(\frac{k}{4f}\right)^{(2-m)/3} \alpha^{(m-5)/6} \rho^{-(m+1)/3} \times \exp\left(-\frac{ik^2\rho^2}{16\alpha f^2} + im\theta\right) J_{(2m-1)/6}\left(\frac{k^2\rho^2}{16\alpha f^2}\right). \quad (7)$$

Согласно уравнениям (1) и (7), входное и выходное поля имеют одинаковую осесимметричную структуру интенсивности:

$$I(r, \varphi) = |E(r, \varphi)|^2 \sim \xi^{-(m+1)/3} J_{(2m-1)/6}^2(\xi),$$

где  $\xi = \beta r^2$ , а  $\beta$  – некоторое действительное число. Из уравнений (1) и (7) также можно видеть, что если  $\alpha = k/(4f)$ , то входной и выходной пучки имеют одинаковый радиус.

В некоторых специальных случаях, когда, например,  $m = 2, 5, 8, 11, \dots$ , функция Бесселя приобретает полупелый порядок, и комплексная амплитуда может быть выражена через элементарные функции. Например, при  $m = 2$ :

$$E_1(r, \varphi) = \sqrt{2/\pi} \xi_1^{-1} \sin \xi_1 \exp(i\xi_1 + 2i\varphi), \quad (8)$$

$$E_2(\rho, \theta) = -\frac{k}{\sqrt{8\pi} f \alpha} \xi_2^{-1} \sin \xi_2 \exp(-i\xi_2 + 2i\theta), \quad (9)$$

где

$$\xi_1 = \alpha r^2, \quad (10)$$

$$\xi_2 = \frac{k^2\rho^2}{16\alpha f^2}. \quad (11)$$

Стоит отметить, однако, что Фурье-инвариантное распределение, полученное из уравнений (1) и (7), имеет недостаток. Комплексная амплитуда светового поля должна быть непрерывной. Чтобы избежать сингулярности при  $r = 0$ , топологический заряд дол-

жен удовлетворять условию  $m \geq 2$ . Однако из формул (8) и (9) видно, что даже при  $m=2$  существует вихрь 2-го порядка без нуля интенсивности, так как комплексные амплитуды (8), (9) вблизи оптической оси имеют вид:

$$E_1(r \rightarrow 0, \varphi) = \sqrt{2/\pi} \exp(i\alpha r^2 + 2i\varphi),$$

$$E_2(\rho \rightarrow 0, \theta) = -\frac{k}{\sqrt{8\pi f \alpha}} \exp\left(-\frac{ik^2 \rho^2}{16\alpha f^2} + 2i\theta\right).$$

Кроме того, не только само поле, но и его производная также должна быть непрерывной (поскольку магнитное поле должно быть непрерывным). Выражение для  $\partial E / \partial r$  довольно громоздко, и здесь оно не приведено, но оно показывает, что для исключения сингулярности (без нулевой интенсивности) мы должны полагать, что  $m \geq 5$ . При  $m=5$  комплексная амплитуда может быть записана следующим образом:

$$E_1(r, \varphi) = \sqrt{2/\pi} \xi_1^{-5/2} \times (\sin \xi_1 - \xi_1 \cos \xi_1) \exp(i\xi_1 + 5i\varphi), \quad (12)$$

$$E_2(\rho, \theta) = \frac{k}{\sqrt{8\pi f \alpha}} \xi_2^{-5/2} \times (\sin \xi_2 - \xi_2 \cos \xi_2) \exp(-i\xi_2 + 5i\theta), \quad (13)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определены в (10) и (11).

#### Энергия мод Фурье–Бесселя дробного порядка

Получим выражение для энергии предложенных пучков. Уравнение (7) можно переписать в виде:

$$E_2(\rho, \theta) = i^{-2(m+1)/3} \frac{k}{4\alpha f} \times \xi_2^{-(m+1)/6} \exp(-i\xi_2 + im\theta) J_{(2m-1)/6}(\xi_2),$$

где  $\xi$  определяется как  $\xi_2$  в (11):

$$\xi = k^2 \rho^2 / (16\alpha f^2). \quad (15)$$

Таким образом, энергия пучка определяется выражением

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |E_2(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\infty \xi^{-(m+1)/3} J_{(2m-1)/6}^2(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Используя справочный интеграл (выражение 2.12.31.2 в [18]), получаем энергию пучка:

$$W = \frac{\pi^{3/2}}{3^{m/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{6}\right)\Gamma\left(\frac{m+4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{m+5}{6}\right)} \frac{1}{\alpha}. \quad (17)$$

Таким образом, в отличие от обычных бездифракционных пучков Бесселя, энергия пучков Фурье–Бесселя дробных порядков конечна.

#### Моделирование Ширина пучка

В этом параграфе мы сравниваем пучки Фурье–Бесселя дробного порядка с хорошо известными модами ЛГ, которые сохраняются при распространении в пространстве и, в частности, в дальней зоне. В исходной плоскости комплексная амплитуда моды ЛГ (в полярных координатах) имеет вид:

$$E_1(r, \varphi) = \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_1}\right)^m L_p^m\left(\frac{2r^2}{w_1^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w_1^2} + im\varphi\right), \quad (18)$$

где  $w_1$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $m$  и  $p$  – азимутальный (топологический заряд) и радиальный индексы моды соответственно. Далее мы полагаем радиальный индекс  $p$  равным нулю, чтобы избежать периферийных световых колец (так как пучки Фурье–Бесселя, как будет показано ниже, имеют в начальной плоскости и в дальней зоне одно световое кольцо почти без боковых лепестков). Когда такой пучок падает на сферическую линзу, то в фокальной плоскости, применяя преобразование Фурье, мы получим следующее распределение амплитуды:

$$E_2(\rho, \theta) = (-i)^{m+1} \left(\frac{z_R}{f}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_2}\right)^m \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_2^2} + im\theta\right), \quad (19)$$

где  $f$  – фокусное расстояние линзы, а

$$z_R = \frac{kw_1^2}{2}, \quad w_2 = w_1 \frac{f}{z_R}. \quad (20)$$

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы пучков Фурье–Бесселя дробного порядка и мод ЛГ в начальной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) и в дальней зоне (задняя фокальная плоскость линзы). В ходе моделирования использовались следующие параметры: длина волны  $\lambda = 532$  нм, фокусное расстояние линзы  $f = 1$  м, топологический заряд оптического вихря  $m = 5$ . Коэффициент масштабирования моды Фурье–Бесселя дробного порядка и радиус перетяжки моды ЛГ соответственно равны  $\alpha = k/(4f) \approx 2,95$  мм<sup>-2</sup> и  $w_1 = (2f/k)^{1/2} \approx 411$  мкм. При этих значениях размер пучка в выходной плоскости точно такой же, как в исходной. Размер расчетной области  $R = 2$  мм ( $-R \leq x, y \leq R$ ). Распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости были рассчитаны с использованием формул (1) и (18), тогда как распределения интенсивности в выходной плоскости были получены с использованием преобразования Френеля, реализованного в виде свертки с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Как видно из рис. 1, распределения интенсивности в выходной плоскости действительно выглядят очень похожими на распределения во входной плоскости, хотя они были получены численно с помощью двух

преобразований Френеля, а не по формулам (7) и (19). Оба пучка имеют поперечную интенсивность в виде светового кольца, в то время как распределение их фаз кардинально отличается. В то время как мода ЛГ содержит только фазу вихря, пучок Фурье–Бесселя дробного порядка дополнительно имеет фазу, подобную параболической линзе. Также видно, что световое кольцо пучка Фурье–Бесселя намного толще, вследствие чего внутреннее темное пятно меньше. Ширина кольца по полуспаду интенсивности у пучка Фурье–Бесселя составляет 624 мкм, тогда как световое кольцо ЛГ имеет ширину 340 мкм, т.е. почти вдвое уже. У моды ЛГ боковые лепестки отсутствуют, в то время как у пучка Фурье–Бесселя дробного порядка боковые лепестки составляют 4,6% от максимальной интенсивности.

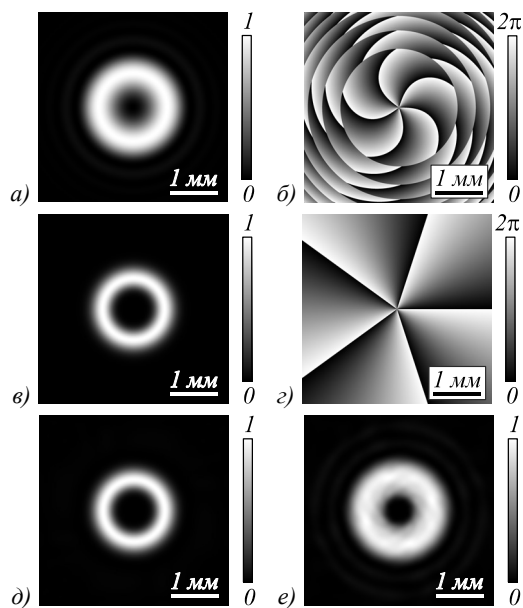


Рис. 1. Распределение интенсивности (а, в, д, е) и фазы (б, г) пучка Фурье–Бесселя дробного порядка (а, б, е) и моды ЛГ (в, г, д) в исходной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) (а–г) и в дальней зоне (задняя фокальная плоскость линзы) (д, е)

#### Расходимость пучка

Дополнительно была изучена расходимость обоих видов пучков. Параметры были выбраны так, чтобы пучок Фурье–Бесселя дробного порядка и мода ЛГ имели одинаковый радиус кольца в исходной плоскости: 1 мм. На рис. 2 показаны распределения интенсивности пучка Фурье–Бесселя и моды ЛГ в передней и задней фокальных плоскостях тонкой линзы. В процессе моделирования были использованы следующие параметры: длина волны  $\lambda = 532$  нм, фокусное расстояние линзы  $f = 1$  м, топологический заряд оптического вихря  $m = 5$ . Коэффициент масштабирования моды Фурье–Бесселя дробного порядка и радиус перетяжки моды ЛГ соответственно равны  $\alpha \approx 1,526 \text{ мм}^{-2}$  и  $w_1 \approx 633$  мкм (такие  $\alpha$  и  $w_1$  позволяют получить радиус кольца распределения интенсивности  $r_1 = 1$  мм в

исходной плоскости). Размер расчетной области  $R = 3 \text{ мм}$  ( $-R \leq x, y \leq R$ ). Распределения интенсивности в начальной плоскости были рассчитаны с использованием формул (1) и (18), тогда как распределения интенсивности в выходной плоскости мы получили с помощью формул (7) и (19).

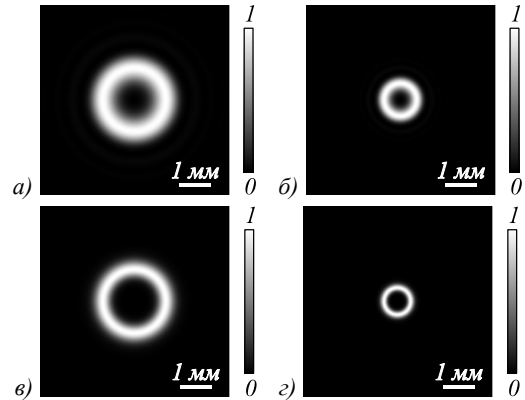


Рис. 2. Распределения интенсивности пучка Фурье–Бесселя дробного порядка (а, б) и моды ЛГ (в, г) в исходной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) (а, в) и в дальней зоне (задняя фокальная плоскость линзы) (б, г)

На рис. 3 показаны сечения пучка Фурье–Бесселя и моды ЛГ в передней и задней фокальных плоскостях линзы.

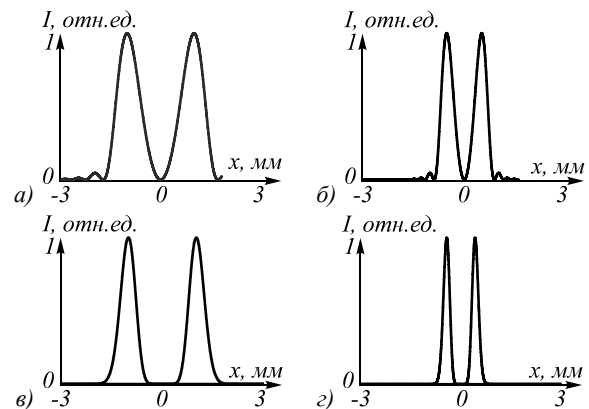


Рис. 3. Горизонтальные сечения интенсивностей пучка Фурье–Бесселя дробного порядка (а, б) и моды ЛГ (в, г) в исходной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) (а, в) и в дальней зоне (задняя фокальная плоскость линзы) (б, г)

Как показывает численное моделирование (рис. 2–3), в дальней зоне (задняя фокальная плоскость) для пучка Фурье–Бесселя радиус максимальной интенсивности на 22% больше ( $r_2 \approx 516$  мкм), чем для моды ЛГ ( $r_2 \approx 422$  мкм). Как и на рис. 1, световое кольцо пучка Фурье–Бесселя на рис. 2 намного толще, чем у моды ЛГ. Ширина по полуспаду интенсивности составила 404 мкм и 223 мкм соответственно.

Мы дополнительно измерили диаметр по полуспаду интенсивности внутреннего темного пятна во входной плоскости (рис. 3а, в), где радиус кольца обоих пучков одинаков. Он составил 1,14 мм и 1,5 мм для пучка Фурье–Бесселя и моды ЛГ соответственно.

Таким образом, для пучка Фурье–Бесселя дробного порядка площадь темного пятна почти в два раза меньше (58%). Даже в задней фокальной плоскости (рис. 3б,з), несмотря на больший радиус кольца пучка Фурье–Бесселя, диаметр его темного пятна меньше, чем у моды ЛГ (592 мкм и 634 мкм соответственно).

Разница в размере радиуса светового кольца пучка Фурье–Бесселя и моды ЛГ может быть объяснена теоретически исходя из используемых формул. Согласно (18) и (19) радиальная зависимость амплитуды моды ЛГ вблизи центра равна  $|E| \sim r^m$ . Уравнения (1) и (7) показывают, что для пучка Фурье–Бесселя дробного порядка  $|E| \sim r^{(m-2)/3}$ . Это означает, что при  $r \ll 1$  интенсивность вблизи центра для пучка Фурье–Бесселя растет намного быстрее, чем для моды ЛГ.

#### Распространение пучка Фурье–Бесселя в свободном пространстве

Чтобы проследить динамику распространения пучка Фурье–Бесселя в свободном пространстве, надо от поля (1) вычислить преобразование Френеля. В отличие от преобразования Фурье, использование которого позволило получить распределение комплексной амплитуды в дальней зоне (7), мы не смогли это сделать аналитически и в данном параграфе приводим численные результаты расчёта распределения интен-

сивности в нескольких поперечных плоскостях. На рис. 4 показаны эти распределения для следующих параметров расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, топологический заряд оптического вихря  $m = 5$ , масштабирующий множитель пучка Фурье–Бесселя  $\alpha \approx 1,526 \text{ мм}^{-2}$  (в этом случае радиус кольца в начальной плоскости равен 1 мм), расстояния распространения 0, 0,5 м, 1 м, 3 м, 5 м, 10 м, 30 м, и 50 м. Расчётная область  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 3$  мм ( $z = 0$  и  $z = 0,5$  м),  $R = 4$  мм ( $z = 1$  м),  $R = 5$  мм ( $z = 3$  м),  $R = 10$  мм ( $z = 5$  м),  $R = 20$  мм ( $z = 10$  м),  $R = 50$  мм ( $z = 30$  м),  $R = 75$  мм ( $z = 50$  м).

Из рис. 4 видно, что пучок Фурье–Бесселя не модовый и его поперечное сечение при распространении меняется. Несмотря на форму широкого кольца в начальной плоскости (рис. 4а), в некоторых других плоскостях распределение интенсивности состоит из нескольких колец, и даже в тех плоскостях, где кольцо одно (рис. 4з), относительная ширина кольца (ширина кольца, делённая на его радиус) намного меньше, чем в начальной плоскости. При дальнейшем распространении, однако, в дальней зоне распределение интенсивности снова приобретает форму (с точностью до масштаба), в точности совпадающую с формой в начальной плоскости (рис. 4з).

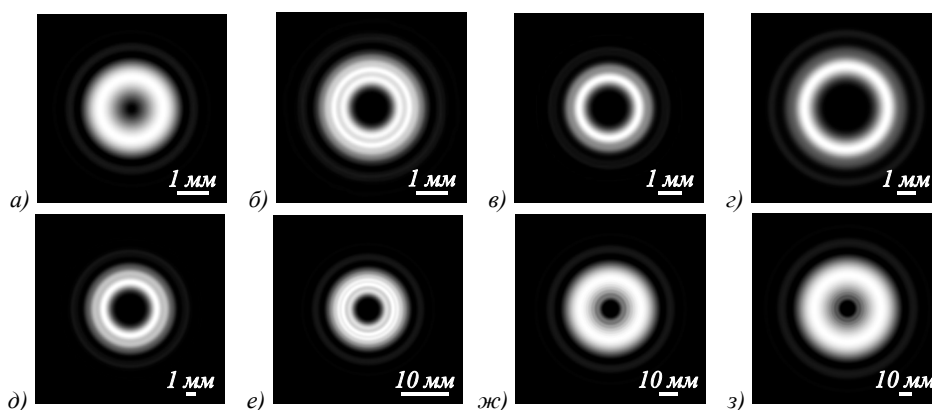


Рис. 4. Распределения интенсивности пучка Фурье–Бесселя в нескольких поперечных плоскостях, расположенных на расстояниях  $z = 0$  (начальная плоскость) (а), 0,5 м (б), 1 м (в), 3 м (г), 5 м (д), 10 м (е), 30 м (ж), 50 м (з)

#### **Заключение**

В этой работе мы рассмотрели световые пучки Фурье–Бесселя дробного порядка, которые содержат оптический вихрь, имеют слабые боковые лепестки и инвариантны к преобразованию Фурье. Все другие известные пучки Бесселя не являются Фурье-инвариантными. Радиальное распределение комплексной амплитуды данных пучков пропорционально функции Бесселя дробного порядка (нечетное целое число, деленное на 6). Эти пучки имеют конечную энергию и при этом не обладают Гауссовой огибающей. У пучков Фурье–Бесселя дробного порядка внутреннее темное пятно меньше, чем у мод ЛГ с нулевым радиальным номером. Возможные области применения предложенных пучков включают в себя

оптическую связь [19], интерферометрию [20] и оптический захват [21].

#### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ (грант № 18-29-20003) в теоретической части, Российского научного фонда (грант № 18-19-00595) в части моделирования и Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в частях «Введение» и «Заключение».

#### **Литература**

1. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory/ J. Durnin // Journal of the Optical Society of

- America A. – 1987. – Vol. 4, Issue 4. – P. 651-654. – DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.
2. **Gutiérrez-Vega, J.C.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chávez-Cerda // Optics Letters. – 2000. – Vol. 25, Issue 20. – P. 1493-1495. – DOI: 10.1364/OL.25.001493.
  3. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega, S. Chávez-Cerda // Optics Letters. – 2004. – Vol. 29, Issue 1. – P. 44-46. – DOI: 10.1364/OL.29.000044.
  4. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element / J.H. McLeod // Journal of the Optical Society of America. – 1954. – Vol. 44, Issue 8. – P. 592-597. – DOI: 10.1364/JOSA.44.000592.
  5. **Indebetouw, G.** Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis / G. Indebetouw // Journal of the Optical Society of America A. – 1989. – Vol. 6, Issue 1. – P. 150-152. – DOI: 10.1364/JOSAA.6.000150.
  6. **Kotlyar, V.V.** Optimal phase element for generating a perfect optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Journal of the Optical Society of America A. – 2016. – Vol. 33, Issue 13. – P. 2376-2384. – DOI: 10.1364/JOSAA.33.002376.
  7. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – Vol. 64, Issue 6. – P. 491-495. – DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
  8. **Caron, C.F.R.** Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence / C.E.R. Caron, R.M. Potvliege // Optics Communications. – 1999. – Vol. 164, Issues 1-3. – P. 83-93. – DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00174-1.
  9. **Li, G.** New generalized Bessel-Gauss laser beams / G. Li, H. Lee, E. Wolf // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. – Vol. 21, Issue 4. – P. 640-646. – DOI: 10.1364/JOSAA.21.000640.
  10. **Kotlyar, V.V.** Hankel-Bessel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Journal of the Optical Society of America A. – 2012. – Vol. 29, Issue 5. – P. 741-747. – DOI: 10.1364/JOSAA.29.000741.
  11. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, Issue 8. – P. 2395-2398. – DOI: 10.1364/OL.39.002395.
  12. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31, Issue 9. – P. 1977-1983. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.001977.
  13. **Hebri, D.** Combined half-integer Bessel-like beams: A set of solutions of the wave equation / D. Hebri, S. Rasouli // Physical Review A. – 2018. – Vol. 98. – 043826. – DOI: 10.1103/PhysRevA.98.043826.
  14. **Ismail, Y.** Shape invariant higher-order Bessel-like beams carrying orbital angular momentum / Y. Ismail, N. Khilo, V. Belyi, A. Forbes // Journal of Optics. – 2012. – Vol. 14, Issue 8. – 085703. – DOI: 10.1088/2040-8978/14/8/085703.
  15. **Pei, S.C.** Eigenfunctions of linear canonical transform / S.C. Pei, J.J. Ding // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2002. – Vol. 50, Issue 1. – P. 11-26. – DOI: 10.1109/78.972478.
  16. **Siegman, A.E.** Lasers / A.E. Siegman. – Mill Valley, California: University Science Books, 1986. – 1283 p.
  17. **Goodman, J.W.** Introduction to Fourier optics / J.W. Goodman. – 2<sup>nd</sup> ed. – New York: McGraw-Hill; 1996. – 491 p.
  18. Integrals and series. Volume 2: Special functions / A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev. – New York: Gordon and Breach, 1986. – 640 p.
  19. **Wen, Y.** Compact and high-performance vortex mode sorter for multi-dimensional multiplexed fiber communication systems / Y. Wen, I. Chremmos, Yu. Chen, G. Zhu, J. Zhang, J. Zhu, Ya. Zhang, J. Liu, S. Yu // Optica. – 2020. – Vol. 7, Issue 3. – P. 254-262. – DOI: 10.1364/OPTICA.385590.
  20. **Cao, W.** Determination of effective parameters of fishnet metamaterials with vortex based interferometry / W. Cao, J. Gao, X. Yang // Optics Express. – 2020. – Vol. 28, Issue 14. – P. 20051-20061. – DOI: 10.1364/OE.391873.
  21. **Cicek, K.** Integrated vortex beam emitter device for optical manipulation / K. Cicek, A. Kocyigit, R. Topkaya, X. Cai // Applied Optics. – 2020. – Vol. 59, Issue 10. – P. 3179-3182. – DOI: 10.1364/AO.384838.

### Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** – см. стр. 496 и 505 этого номера.

**Калинкина Дарья Сергеевна**, 1988 года рождения, в 2011 году с отличием окончила Самарский государственный технический университет – СамГТУ, нефтетеchnологический факультет. Аспирант кафедры технической кибернетики СГАУ. Работает в ОАО НИИ «Гипровостокнефть». Область научных интересов: дифференциальные уравнения, интегральное исчисление, математическая физика. В списке научных работ 6 статей. E-mail: [dskalinkina@gmail.com](mailto:dskalinkina@gmail.com).

**Козлова Елена Сергеевна**, 1989 года рождения. В 2011 году окончила Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика и информатика». Кандидат физико-математических наук с 2014 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Область научных интересов: дифракционная оптика, численные методы. E-mail: [kozlova.elena.s@gmail.com](mailto:kozlova.elena.s@gmail.com).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 20 января 2021 г. Окончательный вариант – 10 марта 2021 г.

---

# Fourier-Bessel beams of finite energy

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, D.S. Kalinkina<sup>2</sup>, E.S. Kozlova<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

In this paper, we consider a new type of Bessel beams having Fourier-invariance property and, therefore, called Fourier-Bessel beams. In contrast to the known Bessel beams, these beams have weak side lobes. Analytical expressions for the complex amplitude of the proposed field in the initial plane of the source and in the far field region have been obtained. It is shown that the proposed Fourier-Bessel beams have a finite energy, although they do not have a Gaussian envelope. Their complex amplitude is proportional to a fractional-order Bessel function (an odd integer divided by 6) in the initial plane and in the Fraunhofer zone. The Fourier-Bessel modes have a smaller internal dark spot compared to the Laguerre-Gauss modes with a zero radial index. The proposed beams can be generated with a spatial light modulator and may find uses in telecommunications, interferometry, and the capture of metal microparticles.

**Keywords:** optical vortices, Fourier-invariant beams, Bessel beams.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Kalinkina DS, Kozlova ES. Fourier-Bessel beams of finite energy. *Computer Optics* 2021; 45(4): 506-511. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-864.

**Acknowledgements:** This work was supported by the RF Ministry of Science and Higher Education within a government project of FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (Sections "Introduction" and "Conclusion"), the Russian Foundation for Basic Research under RFBR project No 18-29-20003 (theoretical research), and the Russian Science Foundation under project No 18-19-00595 (numerical simulations).

## References

- [1] Durnin J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *J Opt Soc Am A* 1987; 4(4): 651-654. DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.
  - [2] Gutiérrez-Vega JC, Iturbe-Castillo MD, Chávez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. *Opt Lett* 2000; 25(20): 1493-1495. DOI: 10.1364/OL.25.001493.
  - [3] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC, Chávez-Cerda S. Parabolic nondiffracting optical wave fields. *Opt Lett* 2004; 29(1): 44-46. DOI: 10.1364/OL.29.000044.
  - [4] McLeod JH. The axicon: a new type of optical element. *J Opt Soc Am* 1954; 44(8): 592-597. DOI: 10.1364/JOSA.44.000592.
  - [5] Indebetouw G. Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis. *J Opt Soc Am A* 1989; 6(1): 150-152. DOI: 10.1364/JOSAA.6.000150.
  - [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Optimal phase element for generating a perfect optical vortex. *J Opt Soc Am A* 2016; 33(13): 2376-2384. DOI: 10.1364/JOSAA.33.002376.
  - [7] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun* 1987; 64(6): 491-495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
  - [8] Caron CFR, Potvliege RM. Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence. *Opt Commun* 1999; 164(1-3): 83-93. DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00174-1.
  - [9] Li G, Lee H, Wolf E. New generalized Bessel-Gauss laser beams. *J Opt Soc Am A* 2004; 21(4): 640-6. DOI: 10.1364/JOSAA.21.000640.
  - [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Hankel-Bessel laser beams. *J Opt Soc Am A* 2012; 29(5): 741-747. DOI: 10.1364/JOSAA.29.000741.
  - [11] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Opt Lett* 2014; 39(8): 2395-2398. DOI: 10.1364/OL.39.002395.
  - [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Skidanov RV, Soifer VA. Asymmetric Bessel-Gauss beams. *J Opt Soc Am A* 2014; 31(9): 1977-1983. DOI: 10.1364/JOSAA.31.001977.
  - [13] Hebri D, Rasouli S. Combined half-integer Bessel-like beams: A set of solutions of the wave equation. *Phys Rev A* 2018; 98: 043826. DOI: 10.1103/PhysRevA.98.043826.
  - [14] Ismail Y, Khilo N, Belyi V, Forbes A. Shape invariant higher-order Bessel-like beams carrying orbital angular momentum. *J Opt* 2012; 14(8): 085703. DOI: 10.1088/2040-8978/14/8/085703.
  - [15] Pei SC, Ding JJ. Eigenfunctions of linear canonical transform. *IEEE Trans Signal Process* 2002; 50(1): 11-26. DOI: 10.1109/78.972478.
  - [16] Siegman AE. *Lasers*. Mill Valley, California: University Science Books; 1986.
  - [17] Goodman JW. *Introduction to Fourier optics*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: McGraw-Hill; 1996.
  - [18] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and series. Volume 2: Special functions*. New York: Gordon and Breach; 1986.
  - [19] Wen Y, Chremmos I, Chen Yu, Zhu G, Zhang J, Zhu J, Zhang Ya, Liu J, Yu S. Compact and high-performance vortex mode sorter for multi-dimensional multiplexed fiber communication systems. *Optica* 2020; 7(3): 254-262. DOI: 10.1364/OPTICA.385590.
  - [20] Cao W, Gao J, Yang X. Determination of effective parameters of fishnet metamaterials with vortex based interferometry. *Opt Express* 2020; 28(14): 20051-20061. DOI: 10.1364/OE.391873.
  - [21] Cicek K, Kocyigit A, Topkaya R, Cai X. Integrated vortex beam emitter device for optical manipulation. *Appl Opt* 2020; 59(10): 3179-3182. DOI: 10.1364/AO.384838.
-

---

### *Authors' information*

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

**Darya Sergeevna Kalinkina** (b. 1988), graduated (2011) from Samara State Technical University, Petroleum Engineering faculty. She is a postgraduate student of Technical Cybernetics department in SSAU. She is also working at JSC SRI "Giprovostokneft". Research interests are differential equations, integral calculus, mathematical physics. She is co-author of 6 scientific papers. E-mail: [dskalinkina@gmail.com](mailto:dskalinkina@gmail.com).

**Elena Sergeevna Kozlova**, (b. 1989) received Master's degree in Applied Mathematics and Informatics in Samara State Aerospace University (2011). She received her PhD in 2014. She is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute – Branch of the Federal Scientific Research Centre “Crystallography and Photonics” of Russian Academy of Sciences and Associate Professor of Computer Science department at Samara National Research University. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: [kozlova.elena.s@gmail.com](mailto:kozlova.elena.s@gmail.com).

---

*Received January 20, 2021. The final version – March 10, 2021.*

---